RIVISTA "L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE." Vol. 228 - N.4 – Agosto 1999. Problema 99.07 (pag. 374).

Con riga e compasso è possibile risalire ai lati di un triangolo conoscendo le tre mediane? E, più in generale, conoscendo due lati ed una mediana, o un lato e due mediane si possono trovare gli altri elementi? Nei casi in cui ciò è possibile, precisare le relazioni fra le lunghezze degli elementi noti.

Indichiamo con *A, B, C* i tre vertici del triangolo, e siano *P, Q, R* rispettivamente i punti medi dei lati *BC, CA, AB.* Sia *G* il baricentro del triangolo, intersezione comune alle tre mediane: *AP, BQ, CR*; siano poi *A', B', C'* rispettivamente i simmetrici di *G* rispetto ai punti *P, Q, R*.

In base a noti teoremi di geometria elementare si dimostra che sono uguali tra loro (per un criterio di uguaglianza dei triangoli) tutti i triangoli: *GAB'* e *GA'B*, *GBC'* e *GB'C*, *GCA'* e *GC'A*. Sempre elementarmente si accerta che per costruzione il segmento *AQ* fornisce la mediana, relativa al lato *GB'*, del triangolo *GAB'*; il segmento *BR* fornisce la mediana, relativa al lato *GC'*, del triangolo *GBC'*, ed il segmento *CP* fornisce la mediana, relativa al lato *GA'*, del triangolo *GCA'*. In altre parole, le osservazioni fatte permettono di enunciare il noto teorema di geometria elementare il quale afferma che il triangolo avente per lati le mediane del triangolo *ABC* ha le sue mediane proporzionali ai lati del triangolo dato.

Ciò permette di rispondere al primo quesito posto, perché permette di risolvere con riga e compasso (cioè, come suol dirsi, "per via elementare") i problemi enunciati. A tale scopo il compito può essere forse facilitato dalla considerazione dell'esagono che ha come vertici i punti *A, B', C, A', B, C'*. Ancora per via elementare si accerta la validità delle relazioni seguenti:

$$(1) \qquad AB' = BA' = GC \;\; ; \;\; BC' = CB' = GA \;\; ; \;\; CA' = AC' = GB.$$

I lati dell'esagono in parola sono a coppie uguali in lunghezza e paralleli tra loro. La considerazione di questa figura permette di eseguire le seguenti costruzioni:

1) Se sono date le tre mediane di un triangolo, questo viene costruito per via elementare costruendo anzitutto il triangolo delle mediane date; le mediane di questo sono i lati di un triangolo simile a quello che si cerca: precisamente, se si costruisce il triangolo che ha per lati i 2/3 delle mediane date, tale triangolo ha per mediane le metà dei lati del triangolo cercato.
2) Se sono dati un lato e due mediane, occorre distinguere due casi:
   2a) Le mediane date partono dai vertici del triangolo che sono estremi del lato dato. Per esempio, con riferimento alla figura, sono date le due mediane *BQ* e *CR* ed il lato *BC*. In questo caso, sempre con riferimento alla figura, si può costruire elementarmente il triangolo *GBC*, che ha come lati il segmento *BC* ed i segmenti *BG* e *CG*, che sono i 2/3 delle mediane date.
   2b) Una sola tra le mediane date parte da un estremo del lato. Per esempio, sempre con riferimento alla figura, sono dati il lato *BC* e le mediane *AP* e *BQ*. In questo caso è possibile costruire elementarmente il triangolo di vertici *GBP* che ha come lati: il segmento *BP* che è la metà del lato dato, il segmento *GB* che è i 2/3 della mediana (data) passante per *B*, ed il segmento *GP*, che è 1/3 della mediana *AP*. Partendo dal triangolo di vertici *GBP* è poi facile risalire al triangolo richiesto.
3) Se sono dati due lati ed una mediana, occorre distinguere due casi:
   3a) La mediana data non passa per il vertice comune ai due lati. Per esempio, con riferimento alla figura, sono dati: i due lati *AB* e *BC* e la mediana *AP*. In questo caso è possibile costruire elementarmente il triangolo avente come vertici *ABP*, che ha come lati: un lato, la mediana che passa per uno dei suoi estremi e la metà dell'altro lato. Partendo dal triangolo *ABP* è poi facile risalire al triangolo cercato.
   3b) La mediana data passa per il vertice comune ai due lati. Con riferimento alla figura, siano per esempio dati i lati *AB* ed *AC* e la mediana *AP*. In questo caso si osserva che il quadrilatero di vertici *ARPQ* è un parallelogramma, avente *AP* come diagonale; esso è quindi costruibile elementarmente, e da questo si risale facilmente al triangolo da costruire.

Volendo seguire la strada del calcolo algebrico per rispondere al problema posto, poniamo:

(2) $BC = 2a$; $CA = 2b$; $AB = 2c$; $AP = p$; $BQ = q$; $CR = r$.

Consideriamo ora i due triangoli ABP, ACP ed applichiamo ad essi il noto teorema di trigonometria detto "di Carnot". Si ha:

(3) $4c^2 = p^2 + a^2 - 2ap\ cos\,APB$, $4b^2 = p^2 + a^2 - 2ap\ cos\,APC$.

Si osserva ora che i due angoli APB ed APC, avendo entrambi lo stesso vertice in P, sono supplementari, e di conseguenza la somma dei loro coseni vale zero. Pertanto, sommando membro a membro le due equazioni (3), si ottiene, dopo qualche ovvia semplificazione:

(4) $p^2 = -a^2 + 2b^2 + 2c^2$.

A questa equazione vanno associate le altre due che si ottengono da lei circolando ciclicamente sulle due terne di lettere: a, b, c e p, q, r. Si ottiene così il sistema:

(5) $q^2 = -b^2 + 2c^2 + 2a^2$; $r^2 = -c^2 + 2a^2 + 2b^2$.

Il sistema di equazioni (4) e (5) può essere risolto senza difficoltà: si giunge quindi alle relazioni che esprimono i lati del triangolo in funzione delle mediane:

(6) $9a^2 = -p^2 + 2q^2 + 2r^2$; $9b^2 = -q^2 + 2r^2 + 2p^2$; $9c^2 = -r^2 + 2p^2 + 2q^2$.

Dai sistemi di equazioni (4), (5), (6) si possono trarre senza difficoltà le procedure per la soluzione geometrica dei problemi enunciati, con costruzioni elementari: infatti le equazioni stesse non contengono potenze delle incognite che siano di esponente superiore a 2.

OSSERVAZIONE. Può essere degna di attenzione la questione della realità delle soluzioni delle equazioni ora scritte; a tal fine si vedrà che la risposta alla questione algebrica di realità è sostanzialmente coincidente con la soluzione elementare dello stesso problema.

A questo fine supponiamo di aver dato i nomi ai lati del triangolo in modo tale che valgano le relazioni seguenti:

(7) $a \geq b \geq c > 0$.

Con queste ipotesi la geometria elementare insegna che le condizioni necessarie e sufficienti perché esista un triangolo i cui lati hanno le lunghezze date sono espresse dalla validità della relazione:

(8) $b + c \geq a$,

e le altre due che si ottengono circolando ciclicamente sui simboli a, b, c, e che sono ovvie conseguenze della (8) e delle ipotesi (7). Si osserva inoltre che la eventuale validità del segno di uguaglianza nella (8) corrisponde ovviamente al caso limite di un triangolo degenere, i cui vertici sono su una medesima retta. Elevando a quadrato entrambi i membri della (8), si ottiene:

(9) $b^2 + 2bc + c^2 \geq a^2$,

d'altra parte si ha ovviamente:

(10) $(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2 \geq 0$.

Sommando membro a membro le (9) e (10) si ottiene la conferma che la (8) fornisce un valore positivo per p^2. Pertanto la realità del valore di p fornito dalla (4) risulta essere conseguenza della (8), cioè condizione necessaria, che consegue alla validità della (4) stessa.

Viceversa, se il secondo membro della (4) fosse negativo, si avrebbe necessariamente:

(11) $b + c < a$,

e quindi il triangolo non sarebbe costruibile. Dimostrazioni analoghe si ottengono circolando sulle terne di lettere a, b, c e p, q, r.

COMPLEMENTI.

La struttura logica del ragionamento dell'ultima parte potrebbe essere formalizzata nel modo seguente: sia U la proposizione che afferma essere vera la (8) e sia α il suo valore di verità (modulo 2).

Sia V la proposizione che afferma essere positivo il secondo membro della (4) e sia β il suo valore di verità. È noto che il valore di verità della implicazione materiale:

$$(12)\ U \Rightarrow V,$$

è dato in funzione dei valori di verità delle due proposizioni dalla formula:

$$(13)\ \alpha\beta + \alpha + 1 \quad (\text{mod } 2).$$

La dimostrazione data accerta che in questo caso l'implicazione (12) è vera e che quindi il valore fornito dalla formula (13) è 1. Ne consegue che in questo caso vale la:

$$(14)\ \alpha\beta + \alpha = 0 \ (\text{mod } 2).$$

Quindi si ha:

$$(15)\ \alpha = 1 \Rightarrow \beta = 1, \quad \text{ed anche:} \quad \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \ (\text{mod } 2).$$

Si osserva tuttavia che dalla falsità di U non consegue la falsità di V, come è mostrato dall'esempio: $a = 1$; $b = 0{,}8$; $c = 0{,}1$. La validità di quest'ultima osservazione può essere confermata anche da una facile illustrazione geometrica. Scegliamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale di origine O. Fatto:

$$(16)\ a = 1,$$

riportiamo b e c rispettivamente sugli assi delle x e delle y. In questa ipotesi, l'insieme dei valori che soddisfanno alle (7) è rappresentato dall'insieme dei punti del quadrato unitario. La diagonale di tale quadrato, congiungente i punti (1, 0) e (0, 1) rappresenta l'insieme dei valori per cui è:

$$(17)\ b + c = 1,$$

e quindi i punti della regione del quadrato nel quadrante in alto a destra rappresentano le coppie di valori di b e c per cui si ha:

$$(18)\ 1 < b + c,$$

dunque le terne di valori per cui il triangolo è costruibile, in presenza dell'ipotesi (15). Indichiamo con **U** tale regione. L'arco di circonferenza dato da:

$$(19)\ 2b^2 + 2c^2 = 1$$

ha centro nell'origine O e raggio $\sqrt{2}$; esso è tangente alla retta (15) nel centro del quadrato. I punti della regione del quadrato stesso in alto a destra dell'arco in parola rappresentano i valori di b e c per cui si ha:

$$(20)\ 1 < 2b^2 + 2c^2.$$

Chiamiamo **V** tale regione. Appare ora chiaro che si ha:

$$(21)\ \mathbf{U} \subset \mathbf{V},$$

ma è evidente che i due insiemi non coincidono; in altre parole appare chiaro che possono esistere dei punti di **V** che non appartengono ad **U**.

CFM , marzo 2001

NdR. Reimpaginato da file giugno 2014

1. *Si può vedere in rete*
http://www.treccani.it/enciclopedia/triangolo

2. *Uno svolgimento in IMSI è contenuto nel file CRDM allegato.*